Trabajo Fin de Máster

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: una propuesta didáctica para 3º de ESO académicas

Linear equations systems with two unknown variables: a didactic proposal for 3rd of Secondary School academics

Autor

Estefanía Bueno Sancho

Director

Víctor Manuel Manero García

Facultad de Educación

2018/2019

Índice

DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

El objeto matemático que se trata en el presente Trabajo Fin de Máster, en adelante TFM, son los Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas en 3º de ESO en la asignatura de Matemáticas Académicas. Antes de comenzar con el estudio del objeto vamos a dar algunas de las definiciones que podemos encontrar acerca de él:

"Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones para las que vamos a buscar una solución común. (…) Los sistemas de ecuaciones lineales son aquellos en los que todas las ecuaciones son de primer grado y se llaman así porque su representación gráfica es una línea recta." (Diáz, Edmundo, 2008)

"Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado, en el cual se relacionan dos o más incógnitas." (Sistema de ecuaciones lineales, 2015)

Así pues dentro de estas definiciones en este TFM se estudian los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y los diferentes métodos de resolución que existen y se explican. Los sistemas a abordar son de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Siendo a_{ij} y b_k números reales y x e y las incógnitas del sistema.

Curso y asignatura

Como ya hemos nombrado anteriormente la propuesta es para 3ºESO de Matemáticas Académicas. Según la ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria encontramos el objeto matemático de la siguiente forma en el curso seleccionado:

Bloque 2: Números y Álgebra

Contenidos:

Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Crit.MAAC.2.3. Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola.

Crit.MAAC.2.4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES

Est.MAAC.2.3.1. Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.

Est.MAAC.2.4.1. Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

Campos de problemas

Los campos de problemas que abordaremos serán principalmente de 4 tipos familiarización, resolución, clasificación, traducción y modelización:

- CP0: Familiarización con la terminología.
- CP1: Resolución de sistemas
    - CP1.1: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante tabla de valores.
    - CP1.2: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos algebraicos.

    - CP1.3: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico.
- CP2: Clasificar los sistemas de ecuaciones lineales.
- CP3: Traducción y modelización de problemas.
    - CP3.1: Traducción de un problema dado en lenguaje habitual.
    - CP3.2: Plantear un problema un problema en lenguaje habitual dado un sistema de ecuaciones lineales.

Técnicas

Para la resolución de este tipo de problemas de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se explicarán 3 métodos:

- T1: Método tabular.
- T2: Método gráfico.
- T3: Método algebraico.
    - T3.1: Sustitución.
    - T3.2: Igualación.
    - T3.3: Reducción.

Tecnologías

Con respecto a las tecnologías asociadas a las técnicas veremos únicamente las relacionadas con el método gráfico. Ya que no es sencillo justificar el resto de técnicas para la ESO.

ESTADO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

Según Monterrubio y Ortega (2009) "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real". Por ello en este apartado con el fin de describir el estado de la enseñanza-aprendizaje real de dicho objeto matemático, vamos a analizar cómo se presentan los sistemas de ecuaciones en algunos libros de texto de distintas editoriales:

- Vizmanos, J.R., Anzola, M. (2002). *Algoritmo*. Editorial: SM.
- Pancorbo, L. (2007). *Vector*. Editorial: Vicens Vives.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M., Alcaide, F., Peralta, J. (2007). *Ábaco*. Editorial: SM.
- Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I., Oliveira, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas Orientadas a las enseñanzas académicas*. Editorial: Anaya.

Introducción escolar del objeto matemático

En los libros de textos analizados encontramos la siguiente forma de presentar los sistemas de ecuaciones:

<u>En SM (2002)</u>:

Se presenta dando un problema concreto de la vida cotidiana y cercano a la realidad de los alumnos. Con él se pone de manifiesto la necesidad de plantear dos ecuaciones y la explicación de las técnicas necesarias para poder resolverlos.

Federico y Alicia están jugando con monedas.

En un determinado momento, Federico le dice a Alicia: «Si me das una de tus monedas, entonces tendré el doble número de monedas que tú». Alicia se queda muy pensativa, y le contesta: «Si tú me das una moneda, entonces tendremos el mismo número de monedas». ¿Cuántas tiene cada uno?

Este tipo de problemas no se pueden resolver planteando una sola ecuación. En este caso, por ejemplo, es necesario plantear dos ecuaciones.

Con el estudio de esta unidad podrás resolver con toda facilidad este problema y otros muy parecidos que se presentan con frecuencia en la vida corriente.

Figura 1. Problema de introducción.

En SM (2007):

Primero hace una breve introducción sobre las situaciones de la vida real en las que aparece la necesidad de plantear un sistema de ecuaciones. A esto le añade una definición de sistema de ecuaciones como herramienta para resolver un determinado tipo de problemas.

Cuando se estudia en qué condiciones se produce un equilibrio entre los recursos que se tienen y los que se gastan, aparecen sistemas de ecuaciones. Por ello resultan útiles para analizar la situación de una familia, de un país o de todo el planeta.
Los sistemas de ecuaciones son una herramienta sencilla y a la vez potente para resolver problemas en los que es necesario averiguar varios valores desconocidos que están sometidos a algunas condiciones.

Figura 2. Introducción sistemas de ecuaciones.

Después podemos ver como plantea 3 problemas concretos dónde debemos usar la herramienta definida anteriormente.


PARA EMPEZAR

1 ¿Cuánto pesan?
a) 2 sandías y 4 melones.
b) 1 sandía y 1 melón.
c) 4 sandías y 5 melones.
d) 2 sandías y 1 melón.

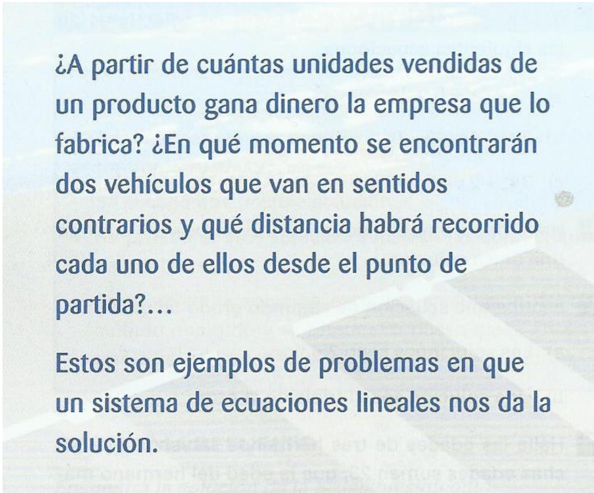
2 Llama x al peso en kilogramos de una sandía e y al peso en kilogramos de un melón, y expresa lo que indican las balanzas del ejercicio anterior en forma de un sistema de ecuaciones.

3 El lucio, uno de los peces de agua dulce más insaciables, ayuda a preservar el equilibrio del sistema junto a otros depredadores. Un lucio, entre salmones y truchas, se ha comido 5 peces. Además se sabe que el número de salmones más el doble del número de truchas es 8.
a) Expresa esos datos en forma de ecuaciones.
b) ¿Cuántos salmones y cuántas truchas ha ingerido?

Figura 3. Problemas para empezar.

En Vicens Vives (2007):

A diferencia de los otros dos libros únicamente plantea ejemplos de preguntas en contextos de la vida real, sin datos concretos y explica que deben resolverse mediante sistemas de ecuaciones.

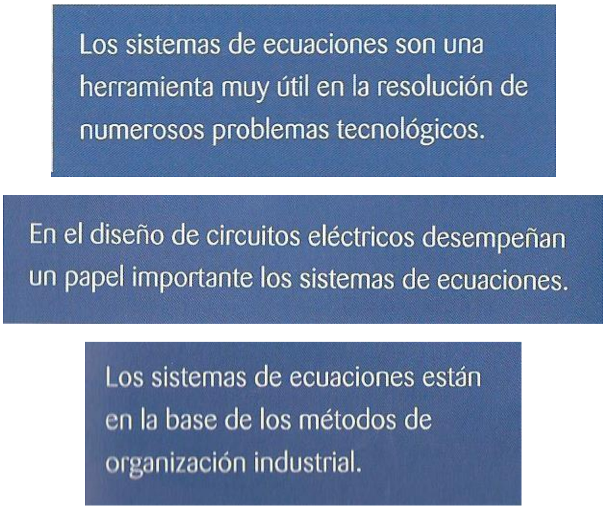


¿A partir de cuántas unidades vendidas de un producto gana dinero la empresa que lo fabrica? ¿En qué momento se encontrarán dos vehículos que van en sentidos contrarios y qué distancia habrá recorrido cada uno de ellos desde el punto de partida?...

Estos son ejemplos de problemas en que un sistema de ecuaciones lineales nos da la solución.

Figura 4. Ejemplos de situaciones.

Además encontramos 3 cuadros en los que pone de manifiesto la utilidad de los sistemas de ecuaciones, lo que creo que es muy necesario ya que los alumnos siempre que se les presenta un objeto matemático nuevo quieren saber si éste les va a servir en un futuro más allá que para aprobar el curso.



Los sistemas de ecuaciones son una herramienta muy útil en la resolución de numerosos problemas tecnológicos.

En el diseño de circuitos eléctricos desempeñan un papel importante los sistemas de ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones están en la base de los métodos de organización industrial.

Figura 5. Utilidades de los sistemas de ecuaciones.

En Anaya (2015):

Este libro de texto es el único que nos introduce el tema hablando del contexto histórico de los sistemas de ecuaciones y dónde encontramos los primeros sistemas de ecuaciones resueltos y con qué utilidad surgieron.

Avances en China

En el siglo I a. C. apareció en China el *Libro de los nueve capítulos*, en el que se incluyen 246 problemas de la vida cotidiana sobre agrimensura, ingeniería, repartos, fiscalidad, etc.

En el capítulo octavo se proponen problemas que dan lugar a sistemas de hasta cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Y se resuelven mediante métodos muy avanzados.

Campesinos chinos tamizando arroz.

Figura 6. Introducción en Anaya.

Después muestra varios de los problemas que encontramos en cada época que nombra y nos plantea unas actividades relacionadas con ellos.

Resuelve

1. Traduce a lenguaje algebraico el problema de la tablilla babilónica y calcula, por tanteo, la longitud y la anchura medidas en manos.
2. El problema chino de las gavillas de trigo se resuelve con un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa el que ves en el enunciado de arriba.
3. Plantea un sistema de ecuaciones para el problema de Diofanto que aparece en la página anterior y encuéntrale una solución.
4. El problema de Diofanto que se muestra en esta página, el de las cántaras de vino, podría traducirse algebraicamente en el sistema de ecuaciones de la derecha, siendo a, b y c números enteros. ¿Qué harías para encontrar una solución?

$$\left.\begin{array}{r} 8a + 5b = c^2 \\ a + b = c \end{array}\right\}$$

Figura 7. Problemas de introducción en Anaya.

$$\frac{1}{4}\ \text{anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos}$$

$$\text{anchura} + \text{longitud} = 10 \text{ manos}$$

Figura 8. Tablilla babilónica del problema 1.

En nuestros campos se cultivan tres clases de trigo; tres gavillas de la primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 20 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 19 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 16 medidas. ¿Cuántas medidas de grano se obtienen de una gavilla de cada clase?

$$3x + 2y + z = 20$$
$$2x + 3y + z = 19$$
$$x + \dots = \dots$$

Figura 9. Enunciado gavillas de trigo para el problema 2.

Obtener dos números que suman 20 y cuyos cuadrados suman 208.

Figura 10. Enunciado de Diofanto del problema 3.

Un comerciante compró vino en cántaras de 8 dracmas y de 5 dracmas, y pagó por ellas un número cuadrado, cuya raíz coincide con el número de cántaras. ¿Cuántas cántaras compró de 8 dracmas y cuántas de 5?

Figura 11. Enunciado de Diofanto para el problema 4.

Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan

Los campos de problemas que se enseñan habitualmente son de dos tipos; resolver un sistema de ecuaciones dado y, el segundo tipo, se presenta un problema en lenguaje textual que debe traducirse al lenguaje algebraico y resolver. La naturaleza de los enunciados de este segundo tipo de problemas es variada, encontramos muchos contextos, aunque suelen aparecer el mismo tipo en todos los libros de texto que busquemos.

En la siguiente tabla encontramos los contextos que encontramos en los libros analizados (en el ANEXO I encontramos ejemplos para cada contexto):

	SM (2002)	VICENS VIVES	SM (2007)	ANAYA
Edades	X	X	X	X
Productos de dos tipos	X	X	X	X
Notas de examen	X	X	X	X
Números	X	X	X	X
Precios. Rebajas o aumentos.	X	X	X	X
Monedas	X		X	
Balanzas			X	X
Geometría	X	X	X	X
Mezclas. Cantidades	X		X	X
Repartos	X	X	X	X
Transportes. Velocidades.	X	X	X	X

Tabla 1. Tipos de problemas en los libros de texto.

Las técnicas de resolución que se enseñan suelen ser las técnicas algebraicas, al menos una de estas las encontramos en todos los libros de texto. El método gráfico también es común encontrarlo. La menos habitual de encontrar es la técnica tabular por ser poco práctica y fiable para hallar la solución, ésta se basa en elaborar una tabla de valores para una de las ecuaciones y probar cuál de esos pares de valores es solución en la otra ecuación. En algunos casos encontramos que, como apoyo en la introducción, los libros de texto utilizan el método tabular para encontrar una solución al sistema de ecuaciones presentado, pero sólo como forma de presentar la noción de solución y no como una técnica para resolverlos. Veamos en una tabla que técnicas encontramos en los libros de textos analizados:

		SM (2002)	VICENS VIVES	SM (2007)	ANAYA
Tabular	*Como apoyo en la intro*	X		X	X
	Como técnica		X		
Algebraica	*Sustitución*	X	X	X	X
	Igualación		X		X
	Reducción	X	X	X	X
Gráfica			X	X	X

Tabla 2. Técnicas en los libros de texto.

Por último, con respecto a las tecnologías que podemos encontrar en los libros de texto, es muy común no encontrar ninguna de hecho en los cuatro libros de texto analizados no encontramos ninguna. Las técnicas son presentadas en un ejemplo y a modo de resumen se suele encontrar como utilizar las técnicas a modo de "recetario".

Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje

Este objeto matemático suele aprenderse de manera mecánica, ya que, se presta especial atención a las tareas y sobre todo a las técnicas que los rodean. Al presentarse como un recetario para ellos es una herramienta de resolución de problemas y la mejor manera para tener destreza en su utilización es hacer muchos ejercicios lo que hace, como hemos dicho, que utilicen las técnicas de manera mecánica.

Además, como se utiliza en problemas contextualizados en la vida cotidiana puede ayudar a que los alumnos se sientan motivados y favorezca la implicación es su proceso de enseñanza-aprendizaje.

CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Conocimientos previos que necesita el alumno

Para enseñar y aplicar las técnicas anteriores y que el alumno pueda enfrentarse a los distintos problemas que aborda el nuevo objeto matemático, éste debe poseer unos conocimientos previos.

Para empezar es lógico que el alumno deba conocer lo que es una ecuación y entienda el concepto de equivalencia dentro de ella, debe saber resolver una ecuación de primer grado, y además, entender que significa el concepto de solución y, por último, sepa comprobar dicha solución.

También debe saber manipular correctamente las tablas de valores necesarias para la resolución tabular y gráfica, de esta manera le será útil para encontrar posibles soluciones para las ecuaciones. Para la resolución gráfica también necesita conocer la ecuación de una recta, saber dibujarla y, además, reconocer las posiciones relativas de una recta.

Para poder resolver los problemas que se le planteen en lenguaje habitual debe tener agilidad en la traducción al lenguaje algebraico.

La enseñanza de esos conocimientos previos

Veamos como se recoge en el currículo básico de educación secundaria obligatoria de Aragón, recogido en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, los anteriores conocimientos previos necesarios:

En 1º y 2º de ESO en el bloque de Números y Álgebra encontramos los siguientes contenidos:

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.

- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) ... Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Actividades para tratar de asegurar dichos conocimientos

Para conocer si el alumno posee los conocimientos anteriores proponemos la siguiente prueba inicial:

PRUEBA INICIAL: SISTEMAS DE ECUACIONES 3º ESO ACADÉMICAS

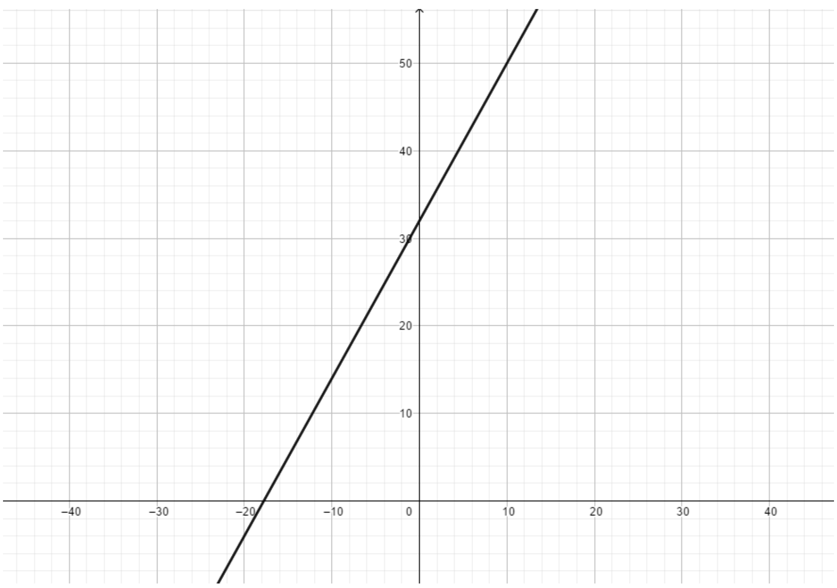
Nombre y apellidos: ____

1) Dibuja las siguientes rectas:
   a. $y = -2x + 8$
   b. $y = 5x$
2) Resuelve de manera algebraica:
   a. $7x + 5 = 8x - 15$
   b. $5x + 3x + 7 = x + 7x - 5$
   c. $2 \cdot (3x + 5) = 0$

3) Completa la tabla que relaciona el lado de un cuadrado con su perímetro y escribe su ecuación:

Lado (en cm)	1	2	3		10	
Perímetro (en cm)	4			20		80

4) La siguiente gráfica nos representa la relación que hay entre grados Celsius y grados Fahrenheit:



a. Completa la tabla:

Celsius	0	14		10
Fahrenheit			0	

b. Determina la ecuación de la recta.

5) Carlos recorre la mitad de un trayecto en tren, la tercera parte en coche y los últimos 12 km a pie. Calcula la distancia que ha recorrido en total.

La prueba se realizará de manera individual en el aula en la sesión previa a la introducción del objeto matemático.

Con el primer ejercicio veré si los alumnos saben representar una recta, necesario para la resolución gráfica y para comprender mejor los distintos tipos de sistemas que van a estudiar. El segundo ejercicio me ayudará a ver como resuelven una ecuación y como manejan las reglas de operación algebraica, ya que necesitan tener agilidad para aplicar las distintas técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones. El tercero y el cuarto son necesarios para poder saber si cuando los alumnos se enfrenten al método tabular van a saber utilizarlo con la destreza necesaria. Por último, el quinto de los ejercicios propuestos nos dirá si saben enfrentarse a un ejercicio de traducción del lenguaje habitual al algebraico.

Los resultados de la prueba nos servirán para guiarnos y conocer dónde nuestros alumnos tendrán más dificultad y qué puntos deberemos reforzar cuando expliquemos el nuevo objeto. Si observase que los conocimientos previos no son los apropiados para comenzar el tema, antes de abordarlo, dedicaría alguna sesión para hacer un repaso.

RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

Razones históricas

Buscando en documentos históricos podemos encontrar sistemas de ecuaciones ya resueltos por los babilonios, a pesar de no usar simbología para nombrar las incógnitas, ellos usaban las palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen para nombrarlas.

En una tablilla babilónica podemos encontrar el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4}\text{ anchura} + \text{longitud} = 7\text{ manos}$$
$$\text{anchura} + \text{longitud} = 10\text{ manos}$$

Figura 12. Tabla babilónica.

Para resolverlo daban un valor a la mano, 5, y buscaban una posible solución, por ejemplo, anchura = 20 y longitud = 30. Después utilizando un método parecido al de la reducción lo comprobaban.

Los griegos utilizando métodos geométricos también encontraron la forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Thymaridas (400 a.C.) encontró una fórmula llamada "la flor de Thymaridas" que permitía resolver un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, este método consiste en lo siguiente:

Partimos de un sistema de ecuaciones en el que conocemos el valor de la suma de todas las incógnitas y conocemos la suma de cada uno de los pares que contienen a una particular de ellas:

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = S \\ x + x_1 = a_1 \\ x + x_2 = a_2 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

El valor de la incógnita común x es:

$$x = \frac{1}{n-2}[(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - S]$$

Esta solución es fácil de encontrar:

Si sumamos las ecuaciones que nos relacionan la suma de cada uno de los pares y tenemos que:

$$(n-1)x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

De ahí se tiene:

$$(n-2)x \underbrace{+x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}_{+S} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1};$$

$$(n-2)x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - S$$

Despejando x llegamos a la fórmula de Thymaridas:

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - S}{n-2}$$

La fórmula se llama "flor de Thymaridas" pues podemos representar las ecuaciones que intervienen en el sistema de la siguiente forma:

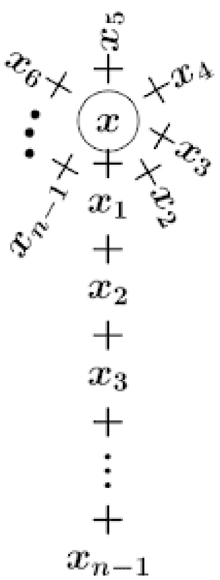


Figura 13. Flor de Thyramidas. Fuente: Bitácora de Matemáticas.

Diofanto (s.III a.C.) para resolver problemas en los que aparecen sistemas de ecuaciones lo hace transformándolos en una ecuación lineal. En las soluciones encontradas, se quedaba corto, ya que sólo contemplaba las positivas puesto que no buscaba resolver el sistema si no el problema. Diofanto no haya un método general para resolver los sistemas y utiliza dependiendo del problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Otro problema de Diofanto

También en la obra de Diofanto aparecen problemas más complejos, cuya resolución exige conocimientos de las relaciones numéricas, de las ecuaciones… y una dosis de tanteo. Aquí tienes un ejemplo:

Un comerciante compró vino en cántaras de 8 dracmas y de 5 dracmas, y pagó por ellas un número cuadrado, cuya raíz coincide con el número de cántaras. ¿Cuántas cántaras compró de 8 dracmas y cuántas de 5?

Figura 14. Problema de Diofanto.

En documentos indios también encontramos sistemas de ecuaciones resueltos, pero ocurre como con Diofanto, no se encuentra un método general si no que resuelven planteándolo como tipos especiales de ecuaciones.

En el siglo I a.C. encontramos documentadas en el libro "*Los nueve capítulos del arte matemático*" o "*Jiuzhang Suanshu*" (s. II d.C.) de autor desconocido concretamente en el capítulo ocho "*Fangcheng"* técnicas generales para la resolución de sistemas de ecuaciones.

En el artículo "A classic from China: The Nine Chapters" del profesor Schwartz, donde hace un análisis del libro "*Jiuzhang Suanshu*" encontramos problemas resueltos por el método de igualación. Veamos alguno de ellos:

Problem 1. Now pay 5785 coins to purchase 1 *hu* 6 *dou* 7 2/3 *sheng* of lacquer. Tell: how much is 1 *dou*?

Jackie wrote:

5785 coins → 1 *hu* 6 *dou* 7 2/3 *sheng*

5785 coins → 10 *dou* + 6 *dou* + (7 2/3)/10 *dou*

5785 coins → 16.76666… *dou*

5785 ÷ 16.76666… coins → 1 *dou*

approx 345 coins → 1 *dou*

Figura 15. Problema traducido del libro "Jiuzhang Suanshu”.

Para resolverlo, es necesario conocer las relaciones que hay en las unidades, que se encuentra en el mismo artículo:

The units adopted in the Qin and later dynasties included those for length, based on the *zhang*, approximately 7½ feet:

1 *zhang* = 10 *chi* = 100 *cun*;

for longer distances, the *li* or “Chinese mile” was used, equal to 180 *zhang*.

Units of area were applied particularly for measuring farm plots, where a man’s “pace” or *bu* (60 *cun*) was a handy reference. The units of area were as follows:

1 *qing* = 100 *mu* = 24,000 square *bu*;

the *qing* was equivalent to about 11.4 of our acres.

Units of volume:

1 *hu* = 10 *dou* = 100 *sheng*;

the *hu* was equivalent to about 5.3 of our gallons.

Units of weight:

1 *jin* = 16 *liang* = 384 *zhu*;

the *jin* was equivalent to a little over 7 of our ounces.

Ratio and Proportion

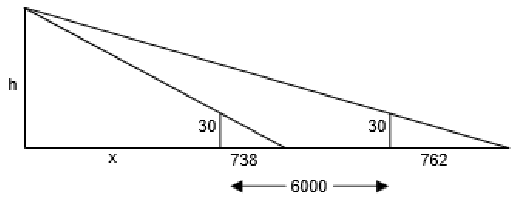
Figura 16. Relaciones de unidades en el libro "Jiuzhang Suanshu”.

Problem 10. Now survey a sea island. Erect two poles of the same height, 3 *zhang*, so that the front and rear poles are 1000 *bu* apart. They are aligned with the summit of the island. Move backwards 123 *bu* from the front pole, sighting at ground level, and find that the summit of the island coincides with the tip of the pole. Move backwards 127 *bu* from the rear pole, sighting at ground level, and find that the summit of the island also coincides with the tip of the pole. Tell: what are the height of the island and its distance from the [front] pole?

Sindhuja wrote:

Use similar triangles!

[She converted all lengths to *chi* in her figure, below.]



By the similarity of the pairs of triangles,

$$\frac{h}{x+738} = \frac{30}{738} \text{ and } \frac{h}{x+6762} = \frac{30}{762}.$$

Thus,

$$30(x+738) = 738h \text{ and } 30(x+6762) = 762h$$

$$30x + 22140 = 738h \text{ and } 30x + 202860 = 762h$$

$$30x = 738h - 22140 \text{ and } 30x = 762h - 202860$$

$$738h - 22140 = 762h - 202860$$

$$202860 - 22140 = 762h - 738h$$

$$180720 = 24h$$

$$h = \frac{180720}{24} = 7530.$$

But $30(x+738) = 738h = 738(7530)$

so $x + 738 = 738(251)$

$x = 738(250) = 184500$

The height of the island is

$$h = 7530\ chi\ = 1255\ bu\ = 4\ li\ 55\ bu.$$

Its distance from the front pole is

$$x = 184500\ chi = 30750\ bu = 102\ li\ 150\ bu. \quad \Delta$$

Figura 17. Problema traducido del libro "Jiuzhang Suanshu”.

Como vemos en estos problemas y se puede ver en el resto del artículo, son contextos agrícolas y económicos del tipo: "si he pagado tanto por esta cantidad a cuánto me ha salido la unidad", o por ejemplo, "qué cosecha necesito para plantar tantas cantidades en esta área".

Razón de ser que se va a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

Ya hemos visto que los sistemas de ecuaciones nos ayudan a buscar las cantidades de los recursos necesarios para obtener el equilibrio deseado en un sistema. Son una herramienta potente para resolver problemas en los que tenemos que averiguar varios valores desconocidos sometidos a unas condiciones. Por ello, emplearemos esta utilidad en contextos cercanos a ellos como introducción al ámbito escolar.

Ejemplos de problemas que constituyen la razón de ser

(RS1) Cada gol que marca Messi gano 2 puntos en el Comunio y cada gol que marca Suarez gano 3. Sabiendo que esta jornada entre los dos han marcado 4 goles y he ganado 9 puntos, ¿cuántos goles ha marcado cada uno?

(RS2) Tomás utiliza en el gimnasio 9 pesas, siendo algunas de 5kg y otras, de 10kg. ¿Cuántas pesas de cada debe poner si en total quiere levantar 65kg?

(RS3) En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas).

La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.

(RS4) Mi hermana y yo hemos ido a comprar lápices y chocolatinas. Yo he comprado 3 chocolatinas y 4 lápices y me he gastado 5,15€. Mi hermana en total se ha gastado 2,85€ y ha comprado 2 chocolatinas y 1 lápiz. ¿Cuánto cuesta cada artículo?

Metodología para implementar la razón de ser en el aula

Se comenzará entregando a los alumnos una hoja con los problemas que constituyen la razón de ser (RSi). Se les dejará ponerse por parejas aunque la hoja deberá rellenarse de manera individual. Para formar las parejas buscaremos que sean heterogéneas, ayudándonos de los resultados obtenidos de la prueba inicial. Antes de que comiencen a resolver los problemas se les dirá como pauta que en cada problema deben aparecer dos incógnitas, ya que los 3 primeros problemas pueden ser resueltos planteando una única ecuación de una incógnita, aunque de esa forma estén utilizando de una manera indirecta el método de sustitución, pero lo que nos interesa es que de primeras encuentren las dos incógnitas y las dos ecuaciones que las relacionan.

Se les deja un tiempo para que empiecen con el primero, esperamos que la mayoría por no decir todos sean capaces de traducirlo al lenguaje algebraico. Vamos pasando por las mesas y guiándoles un poco para que todos lo puedan traducir. Después en la pizarra les haré la traducción y la manera correcta de escribir el sistema:

x: $goles\ de\ Messi$

y: $goles\ de\ Suarez$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Una vez lo tengan se les dice que para resolverlo pueden ir probando soluciones, para ello deben coger una de las ecuaciones, en este caso la primera, y dar los posibles valores a la x y de ahí pueden sacar los de la y, con esos pares de valores calculamos los puntos obtenidos con la segunda ecuación:

x	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0
Puntos	12	11	10	9	8

Vemos que la solución de la primera ecuación que nos permite llegar a los 9 puntos que nos dice la segunda, es la solución en la que ha marcado 3 goles Messi y 1 gol Suarez.

Una vez visto el primero se da tiempo para que resuelvan el segundo, esta vez esperamos que la mayoría llegue hasta el final ya que han visto cómo resolver el primero. Vamos pasando por las mesas para ir viendo cuántos han entendido lo que hemos hecho en el primero y con esto van haciendo el segundo. Una vez dado este tiempo y dando pautas por las mesas si fuera necesario, dejamos que alguno de los alumnos que lo han resuelto salgan a la pizarra, si vemos que van muy perdidos lo resolveré yo en la pizarra.

$x: pesas\ de\ 5kg$

$y: pesas\ de\ 10kg$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 65 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5
y	9	8	7	6	5	4
Peso	90	85	80	70	75	65

Con este ejemplo les hacemos ver que no es necesario calcular todas las opciones y con esto se llega a que la solución es 5 pesas de 5kg y 4 pesas de 10kg.

Hacemos lo mismo con el tercer ejercicio, aunque antes de que empiecen a probar, de manera general, se les advierte de que piensen bien por qué valor empezar a probar e ir tanteando para llegar al resultado.

Se les va dando el tiempo y se resuelve en la pizarra:

$x: respuestas\ correctas$

$y: respuestas\ incorrectas$

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x - 0{,}5y = 80{,}5 \end{cases}$$

x	90	85	87
y	10	15	13
Puntuación	85	77,5	80,5

Empezamos por 90 correctas ya que si la solución es 80,5 al menos ha obtenido 81 preguntas correctas pero teniendo en cuenta que los fallos restan. Como vemos que nos hemos pasado de puntuación probamos con 85 y nos quedamos cortos. Probamos con 87 que es un número intermedio y llegamos a la solución.

La solución es 87 respuestas han sido correctas y 13 respuestas incorrectas.

El resto del tiempo de la clase se les dejará plantear el último problema y al intentar resolverlo verán que la forma con la que habíamos resuelto el resto se queda corta, ya que no se trata de una solución entera. Así pues, se les deja que piensen y vamos viendo que van haciendo. Este último no se resolverá en la pizarra ya que requiere una mayor explicación y se les dice que durante el tema seremos capaces de resolverlo.

CAMPOS DE PROBLEMAS

Tipos de problemas que se van a presentar en el aula

CP0: Familiarización con la terminología.

Este tipo de problemas son todos los relacionados con la familiarización y comprensión de las terminologías del tema: coeficientes, incógnitas, ecuaciones, solución.

CP1: Resolución de sistemas.

CP1.1: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante tabla de valores.

CP1.2: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos algebraicos.

CP1.3: Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método gráfico.

Son problemas de resolución en los que encontramos directamente un sistema de ecuaciones lineales que se deberá resolver por el método indicado o bien en el caso de los de CP1.2 puede ser que no se pida un método en concreto y que el alumno elija.

CP2: Clasificar los sistemas de ecuaciones lineales.

En los problemas del tipo CP2 se presentan sistemas de ecuaciones y se pedirá que se identifique de qué tipo son según la clasificación dada clase en función del número de soluciones del sistema.

CP3: Traducción y modelización de problemas.

CP3.1: Traducción de un problema dado en lenguaje habitual y su resolución.

CP3.2: Plantear un problema en lenguaje habitual dado un sistema de ecuaciones lineales.

Por último, encontramos problemas de traducción donde; o bien encontramos un problema dado en lenguaje habitual que debemos traducir al lenguaje algebraico y posteriormente resolver el sistema planteado, o bien, son problemas donde dadas unas condiciones para construir un sistema se pide que se dé un enunciado en lenguaje habitual en el que la solución se obtenga planteando dicho sistema.

A continuación voy a definir cuáles serán los problemas de cada tipo que vamos a ver en el aula (la nomenclatura utilizada será Pnº - CPx, siendo nº la enumeración de los problemas y CPx nos indica el campo de problemas al que pertenezca).

P1 - CP0) Dado el sistema $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ y las soluciones $\begin{cases} x=25 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}$ comprueba cuál es solución del sistema.

P2 - CP0) Comprueba que $x=0$ e $y=3$ es una solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x-9y=-27 \\ 8x+y=3 \end{cases}$$

P3 - CP0) Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales distintos que tengan como solución $x=1$ e $y=-2$.

P4 - CP0) Determina a y b para que $x=3$ e $y=2$ sea solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax-y=4 \\ 2x+by=-2 \end{cases}$$

P5 - CP0) Comprueba si $x=3,\ y=-2$ es solución del sistema $\begin{cases} 3x+5y=-1 \\ 2x-y=9 \end{cases}$.

P6 - CP0) Encuentra una ecuación lineal con dos incógnitas que junto con la ecuación $x-3y=2$ forme un sistema cuya solución sea $x=8, y=2$.

P7 - CP0) Determina los valores de a y b para que $x = -1, y = -2$ sea la solución del sistema:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x - y = b \end{cases}$$

P8 - CP1.1) Resuelve el sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ mediante el método tabular.

P9 - CP1.1) Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de tabla de valores:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

P10 - CP1.1, CP3.1) Plantea para el siguiente enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante tabla de valores:

"En el garaje de mi vecino hay en total 5 vehículos entre motos y coches, ha comprado 14 neumáticos para cambiar las ruedas de todos los vehículos que hay, ¿cuántos coches y motos tiene?"

P11 - CP1.2) Resuelve mediante el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x - 5y = 38 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y = 23 \\ 5y - 9x = 13 \end{cases}$

P12 - CP1.2, CP3.1) Plantea para el siguiente enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante el método de sustitución:

"La suma de dos números es 39 y su diferencia es 17, ¿cuáles son esos dos números?"

P13 - CP1.2) Resuelve mediante el método de igualación:

a) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2y - x = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \\ 2y + 6x = 48 \end{cases}$

P14 - CP1.2, CP3.1) Plantea para el siguiente enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante el método de igualación:

"En un examen tipo test hay 40 preguntas. Por cada acierto se suma un punto y por cada fallo se resta medio punto. Un alumno que ha respondido todas las preguntas ha obtenido un 32,5 sobre 40. ¿Cuántas preguntas ha acertado y cuántas ha fallado?"

P15 - CP1.2) Resuelve mediante el método de reducción:

a) $\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x - y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x + y = 21 \end{cases}$

P16 - CP1.2, CP3.1) Plantea para el siguiente enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo mediante el método de reducción:

"Marta se ha comprado dos cuadernos y tres bolígrafos y yo me he comprado tres cuadernos y 5 bolígrafos. A ella le ha costado todo 8€ y yo he tenido que pagar 12,5€, ¿cuánto cuesta cada artículo?"

P17 - CP1.3) Resuelve mediante el método de gráfico:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathrm{y} = -1 \\ 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 8 \end{cases}$

P18 - CP2, CP0) Determina cómo son y qué número de soluciones tendrán los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 6x - y = 4 \\ \frac{y}{2} - 3x = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 8y = 3 \\ 2x - 16y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 6y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 25x - y = 1 \\ 5y - 5x = \frac{1}{5} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 7y = 3 \\ 21y - 3x = -9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x + 9y = 3 \\ 15x + 27y = 1 \end{cases}$

P19 - CP2, CP0) Diseña un sistema de ecuaciones para cada caso que cumpla las siguientes condiciones y después resuélvelo:

a) Un sistema compatible indeterminado en el que las soluciones cumplen que $x = y + 3$.
b) Un sistema incompatible.
c) Un sistema compatible determinado con solución $x = 3$ e $y = 5$.

P20 - CP1) Resuelve mediante el método algebraico que consideres más oportuno (debes utilizar los 3 métodos aprendidos):

a) $\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 30 \\ y - \frac{x}{2} = 27 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

P21 - CP3.2) Expresa situaciones de la vida real que puedan resolverse con cada uno de los sistemas del problema anterior.

P22 - CP3.1) Ayer me compré dos pantalones y tres camisetas y pagué por todo 113,75€. Hoy han empezado las rebajas, las camisetas tienen un 20% de descuento y los pantalones un 30%, ¿cuánto valía cada prenda antes del descuento si hoy pagaría por mi compra 83,30€?

P23 - CP3.1) Tenemos dos ciudades A y B. Desde A hacia B sale un vehículo a 110km/h y en el mismo momento sale un vehículo desde B hacia A a 90km/h. Si sabemos que la distancia entre ambas ciudades es de 350km, ¿cuánto tardarán en encontrarse y cuánto ha recorrido cada vehículo hasta ese momento?

P24 - CP3.1) Tenemos que mezclar dos pinturas para obtener 55 litros de mezcla y que el precio de la mezcla sea 61,9€. El primer tipo de pintura cuesta 1,03€/l y el segundo 1,24€/l, ¿cuántos litros de pintura de cada tipo necesitamos?

P25 – CP1.3) Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método gráfico:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$

Metodología para implementar los campos de problemas

La metodología a seguir será la siguiente, en la tercera sesión se les repartirá una hoja con los problemas enunciados anteriormente. Se les explicará primero las técnicas para que sean resueltos y después se les pedirá que se enfrenten al problema. Los problemas los irán resolviendo de manera individual o por parejas en el aula mientras voy pasando por las mesas para resolver pequeñas dudas que puedan ir teniendo, después se resolverán en la pizarra, o bien algún alumno o bien yo misma si es necesario hacer alguna puntualización importante dependiendo de lo que haya ido viendo al pasar por las mesas. La idea es que puedan ir trabajando todo en clase, ya que estos ejercicios requieren practicarse para coger soltura y resolverse con rapidez puesto que la dificultad que presentan es pequeña, y que después como tarea tengan algún ejercicio similar para que practiquen en casa lo aprendido en la sesión pero sin saturarlos demasiado.

TÉCNICAS

Las técnicas que se van a explicar en el aula se van presentar de manera asequible, se les dará una secuencia de pasos sencillos y claros a seguir para cada una de las técnicas.

La forma de introducirlas será dar las directrices básicas y aplicarlas a un ejemplo.

Técnica tabular

Está técnica se verá en los problemas RSi así que simplemente, se les dirá, los pasos a seguir:

1. Creamos una tabla con los valores de x e y. Cogiendo una de las ecuaciones iremos dando valores a una de las variables e iremos sacando el valor de la otra.

x	valores de x
y	valores de y

2. Agregamos a la tabla una tercera fila donde pondremos el valor de la ecuación que no hemos utilizado con los valores de x e y que hemos ido calculando en el punto 1.

x	valores de x
y	valores de y
Ecuación 2	valor de la ecuación

3. Repetiremos el proceso hasta que en la tercera fila hayamos encontrado el valor que nos pide el problema. La solución serán los valores de x e y que nos han dado ese resultado.

   Con la práctica los alumnos irán viendo cómo se deben ir dando los valores a x e y para llegar a la solución de manera más rápida ya que en los problemas descontextualizados el número posible de valores de x e y son infinitos y se debe pensar antes de empezar a dar posibles valores.

Técnicas algebraicas

Sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Pasos a seguir:

1. Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.
2. En la otra ecuación se sustituirá el valor de la incógnita despejada en el primer paso y obtendremos una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el punto 2.
4. Volvemos a la ecuación que hemos dejado despejada en el punto 1 y sustituimos por el valor obtenido en el punto 3 para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ resuelve por el método de sustitución:

Despejamos y en la primera ecuación: $y = 7 - 2x$

Sustituimos en la segunda ecuación: $3x + 2(7 - 2x) = 11$

Resolvemos la ecuación:

$$3x + 2(7 - 2x) = 11$$

$$3x + 14 - 4x = 11$$

$$-x = 11 - 14$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Calculamos la otra incógnita: $y = 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 6 = 1$

La solución al sistema es $x = 3$ e $y = 1$

Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar.

Pasos a seguir:

1. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualamos lo que hemos obtenido en el punto 2 ya que tenemos dos ecuaciones que son iguales a la misma incógnita. Así obtendremos una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el punto 2.
4. Volvemos a una de las ecuaciones que hemos dejado despejada en el punto 1 y sustituimos por el valor obtenido en el punto 3 para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 4y = 20 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ resuelve por el método de igualación:

Despejamos x en ambas ecuaciones: $x = 20 - 4y$

$x = 8 + 2y$

Igualamos: $20 - 4y = 8 + 2y$

Resolvemos la ecuación:

$$20 - 4y = 8 + 2y$$
$$20 - 8 = 2y + 4y$$
$$12 = 6y$$
$$y = 2$$

Calculamos la otra incógnita: $x = 20 - 4 \cdot 2 = 20 - 8 = 12$

La solución al sistema es $x = 12$ e $y = 2$

Reducción

Consiste en sumar o restar las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación con una incógnita.

Pasos a seguir:

1. Igualar coeficientes de una de las incógnitas en las dos ecuaciones. Para ello multiplicamos las ecuaciones por la constante que sea necesaria.
2. Sumar o restar las ecuaciones (dependiendo del signo del coeficiente). Como una de las incógnitas tendrá el mismo coeficiente esta desaparecerá y el resultado será una ecuación de primer grado con una incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el punto 2.
4. Volvemos a una de las ecuaciones iniciales y sustituimos por el valor obtenido en el punto 3 para obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 27 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$ resuelve por el método de reducción:

Igualamos coeficientes de la x en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 27 \\ 2x + y = 21 \end{cases} \overset{x2}{\rightarrow} \begin{cases} 2x + 4y = 54 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$$

Como los coeficientes de la x tiene el mismo signo restamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 54 \\ -\quad 2x + y = 21 \\ \hline / \ +3y = 33 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación:

$$3y = 33$$
$$y = 11$$

Calculamos la otra incógnita: $x = 27 - 2 \cdot 11 = 27 - 22 = 5$

La solución al sistema es $x = 15$ e $y = 11$

<u>Técnica gráfica</u>

Está técnica consiste en dibujar las rectas que representan cada una de las ecuaciones e interpretar el dibujo.

Pasos a seguir:

1. Despejar de las dos ecuaciones la y.
2. Elaborar una tabla de valores para cada ecuación. Para cada ecuación daremos dos valores a la x y obtendremos el valor de y. Esto nos dará como resultado 2 pares de puntos.
3. Representar en la misma gráfica el primer par de puntos y dibujamos la recta que los une, repetimos para el segundo par de puntos que hemos obtenido en el paso anterior. Dando como resultado 2 rectas.
4. El punto de corte de las rectas nos da la solución del sistema. Veremos el valor de x e y del punto.
5. Comprobar la solución obtenida en el sistema original. Sustituimos en cada una de las ecuaciones los valores de x e y para comprobar que verifican ambas ecuaciones.

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$ resuelve por el método de gráfico:

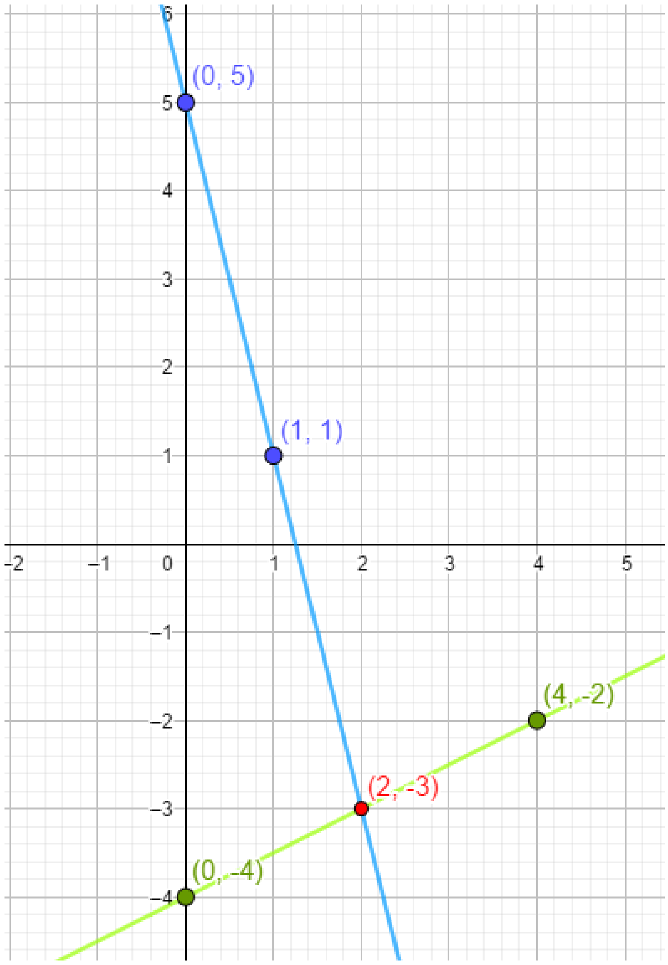
Despejamos y en ambas ecuaciones: $y = 5 - 4x$

$$y = \frac{x}{2} - 4$$

Elaboramos una tabla de valores para cada ecuación:

x	$y = 5 - 4x$	x	$y = \frac{x}{2} - 4$
0	5	0	-4
1	1	4	-2

Representamos en la misma gráfica los datos:



El punto de corte de las rectas nos da la solución del sistema: $x = 2$e $y = -3$

Comprobamos la solución:

$$\begin{matrix} 4 \cdot 2 + (-3) = 5 \\ 2 - 2 \cdot (-3) = 8 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 8 - 3 = 5✔ \\ 2 + 6 = 8✔ \end{matrix}$$

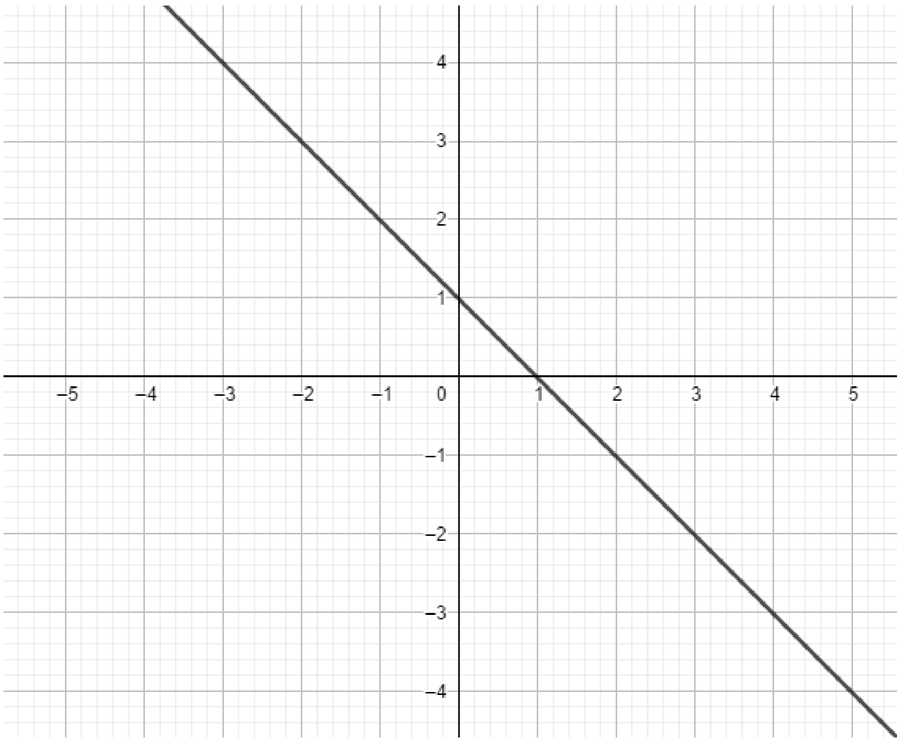
TECNOLOGÍAS

Como ya hemos comentado en las tecnologías que sustentan las técnicas anteriores no suelen aparecer en los libros de texto. No es sencillo justificarlas en alumnos de la ESO y tampoco es necesario para que comprendan y manejen las técnicas con soltura. La tecnología que es interesante de ver es la relacionada con el método gráfico ya que es muy visual y fácil para comprender y nos ayudará a clasificar los distintos tipos de sistemas de ecuaciones.

Cuándo nos enfrentamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas podemos afrontar cada una de ella de manera individual.

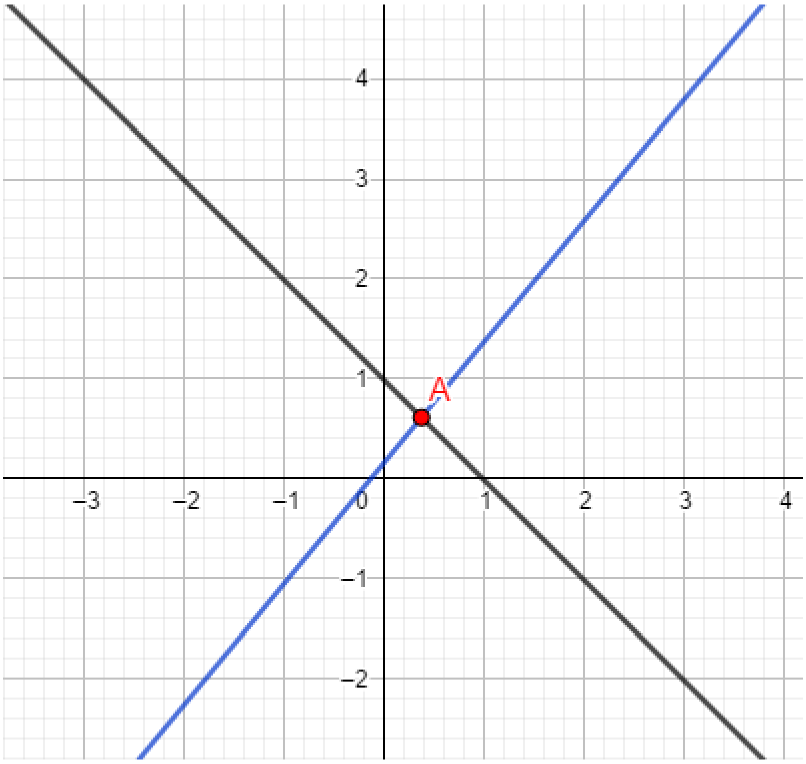
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \; con\ a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$$

Cogemos la primera y sabemos que tiene infinitos pares de valores para x e y que son soluciones de la ecuación que si se representan en el eje de coordenadas como puntos obtenemos una recta.



Si realizamos el mismo ejercicio con la segunda obtendremos dos rectas en el plano.

Cada punto de cada recta representa cada una de las soluciones que cumplen cada una de las ecuaciones. Por lo que el punto dónde se corten esas dos rectas será solución común a ambas ecuaciones por lo que los valores del punto serán la solución x e y que estamos buscando. En este caso decimos que el sistema es compatible determinado.

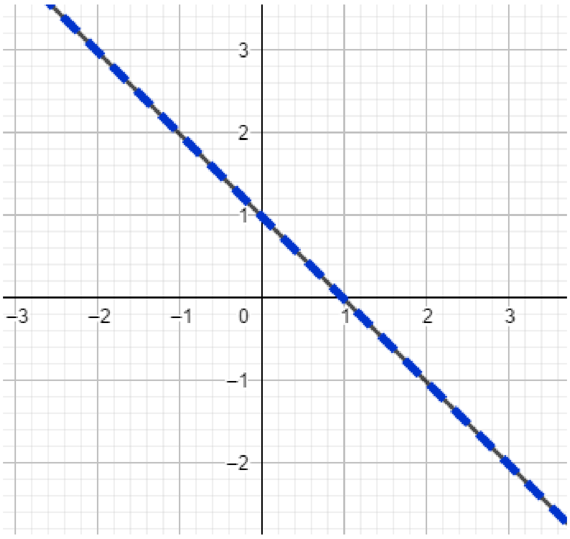


Al dibujar las rectas podemos encontrar dos casos particulares:

- Primer caso particular:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

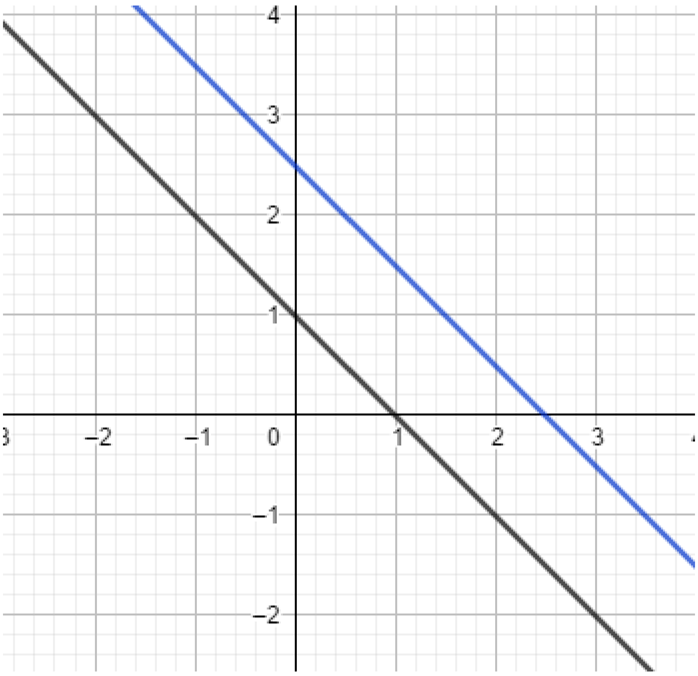
En este caso ambas rectas son coincidentes por lo que el conjunto de puntos que representan es el mismo. En ese caso, se dice que el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones:



- Segundo caso particular:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

En este caso ambas rectas son paralelas por lo que no habrá ningún punto en común entre ambas ecuaciones, ya que las rectas representan las soluciones de cada ecuación y al no cortarse no hay un punto que coincida. En ese caso, se dice que el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución:



SECUENCIA DIDÁCTICA Y CRONOGRAMA

En total serán 10 sesiones de 50 minutos que distribuiremos de la siguiente forma:

Nº de sesión	*Que trataremos*
1	Prueba inicial.
2	Razón de ser.
3	Qué es un sistema de ecuaciones y método tabular.
4	Método de sustitución.
5	Método de igualación.
6	Método de reducción.
7	Método gráfico.
8	Tipos de sistemas. Clasificación.
9	Problemas de repaso.
10	Evaluación.

Sesión 1:

Pasaremos una copia de la prueba inicial vista en el apartado tercero y deberán resolverla de manera individual.

Sesión 2:

Antes de comenzar con el tema de sistemas de ecuaciones se hará un repaso si se detecta algún fallo común en la prueba inicial o vemos que es necesario comentar algo acerca de ella. A continuación comenzaremos con la sesión 2, repartiremos una copia con los problemas RSi a cada alumno y como hemos comentado anteriormente podrán ponerse por parejas pero de una forma heterogénea, en función de los resultados que hemos observado en la prueba inicial. Se dejarán unos 10 minutos para que los alumnos trabajen los problemas y se resolverán en la pizarra en aproximadamente 4 minutos. El último problema se tratará de manera especial ya que no se resolverá en la pizarra y se dará tiempo para que los alumnos lo piensen y trabajen, aproximadamente unos 8 minutos, el restante que nos hayan dejado los otros 3 problemas.

La metodología de las siguientes sesiones será la misma, los primeros minutos se dedicarán a corregir los problemas que hayan quedado en la sesión anterior como deberes y resolver las dudas que puedan tener los alumnos. Después explicaremos la técnica que corresponda con un ejemplo o se definirán los términos que se van a trabajar en los problemas. Por último, se mandarán problemas, para resolver cada uno en su cuaderno pero podrán hacerlos en parejas para ir ayudándose, dónde aplicar lo explicado y posteriormente se irán corrigiendo en la pizarra, si no da tiempo a hacer todos los planificados para la sesión se mandarán como deberes.

Sesión 3:

Qué es un sistema de ecuaciones y método tabular	
Contenido	Se definirá de manera formal un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se pondrá en la pizarra un sistema sencillo para que, de manera global, den una solución del sistema, posteriormente pasaremos a definir lo que es solución del sistema. Para finalizar daremos en la pizarra los pasos a seguir de manera formal de la técnica tabular, no profundizaremos mucho porque ya hemos trabajado con ella en la razón de ser.
Problemas	Del P1 al P10. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P1, P4 y P8.

Sesión 4:

Método de sustitución	
Contenido	Plantearemos el sistema del ejemplo que hemos visto para la técnica de sustitución e iremos resolviendo paso a paso y explicándolos detenidamente. Después a modo resumen pondremos los pasos a seguir como están planteados en el punto "Sobre las técnicas".

Problemas	P11 y P12. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P11a.

Sesión 5:

Método de igualación	
Contenido	De manera similar a la sesión anterior explicaremos la técnica de igualación.
Problemas	P13 y P14. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P13a.

Sesión 6:

Método de reducción	
Contenido	De manera similar a la sesión explicaremos la técnica de reducción.
Problemas	P15 y P16. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P15a.

Sesión 7:

Método gráfico	
Contenido	De manera similar a la sesión anterior explicaremos el método de gráfico.
Problemas	P17. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P17a.

Sesión 8:

Tipos de sistemas. Clasificación.	
Contenido	Se explicará en la pizarra viendo ejemplos resueltos por el método gráfico los posibles tipos de sistemas que se pueden encontrar: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. Después definiremos de manera formal los 3 tipos dando las relaciones que existen entre los coeficientes en cada uno de los casos para que los puedan identificar de manera rápida.
Problemas	P18 y P19. Al menos se corregirá en la pizarra en esta sesión el P18a.

Sesión 9:

Problemas de repaso	
Contenido	Trabajaremos el resto de ejercicios a modo de repaso.
Problemas	Del P20 al P25. Se deben corregir en la pizarra todos los problemas.

Sesión 10:

En la última sesión se les pasará de manera individual una copia de la prueba final definida en el siguiente punto de este trabajo. Tendrán la duración de la sesión para resolverla.

EVALUACIÓN

Diseño de una prueba escrita

PRUEBA PARA 3ºESO ACADÉMICAS – SISTEMAS DE ECUACIONES

Nombre y apellidos: ____

1. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por el procedimiento algebraico que consideres más oportuno (debes utilizar los tres procedimientos -igualación, sustitución y reducción-, uno en cada apartado). [3 puntos]

   a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ -4x - 6y = -30 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 2y = 10 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 3y - 5x = 2y - 3 \end{cases}$

2. Resuelve gráficamente [1 punto]:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

3. Enuncia para cada caso una situación real cuya interpretación matemática sea [1,5 puntos]:

   a) Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya única solución sea (3,12).

   b) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tenga solución.

   c)

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x - 0{,}5y = 30 \end{cases}$$

4. Completa los huecos para que el sistema sea [1,5 puntos]:

$$\begin{cases} 2x - 3y = \_\_ \\ x + \_\_\ y = -1 \end{cases}$$

   a) Compatible determinado y tenga por solución única $x = 2$ e $y = 1$.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

5. Una empresa ha gastado 1.500 euros en comprar un móvil a cada uno de sus 25 empleados. Su compañía telefónica ofertó dos modelos diferentes, uno a 75 euros y otro a 50 euros. ¿Cuántos móviles de cada modelo compró? [1,5 puntos]

6. Un transportista lleva en su furgoneta sacos de arroz de dos pesos distintos. Los sacos grandes tienen un peso de 30 kg, mientras que los pequeños pesan un 20% menos. El conductor recuerda que el número de sacos pequeños es el triple del de sacos grandes, y que el peso total de la mercancía es de 714 kilogramos. Calcula el número de sacos de cada tipo que se transportan. [1,5 puntos]

Aspectos del conocimiento a evaluar

Los aspectos a evaluar son distintos en cada uno de los ejercicios propuestos y corresponden a los distintos puntos y contenidos que se han trabajado a lo largo de las sesiones.

En el primer y segundo ejercicio pretendemos evaluar cada una de las técnicas enseñadas. El método tabular no se pide explícitamente como método de resolución pero deben manejar las tablas de valores igualmente para la resolución gráfica. Estas preguntas están relacionadas con los CP1.

En el tercer ejercicio se trata de evaluar la capacidad de relacionar y plantear problemas en lenguaje habitual y relacionados con la vida cotidiana con los conceptos matemáticos que se han visto en las sesiones. Esta pregunta está relacionada con CP3.2. pero también de manera indirecta con CP2 y CP0.

La cuarta pregunta sirve para evaluar si el alumno ha entendido lo que es un sistema de ecuaciones, que significa que unos valores sean solución y además conozca las distintas clasificaciones de los sistemas y sepa identificarlas. Esta pregunta está relacionada con CP2 y CP0.

Por último, los ejercicios 5 y 6 se tratan de ejercicios de traducción del lenguaje habitual al algebraico, por ellos podremos evaluar si un alumno es capaz de traducirlo correctamente. Además se pide que se resuelva por lo que también entrarán en juego la evaluación del manejo de las distintas técnicas de resolución de los sistemas de ecuaciones explicadas. Esta pregunta está relacionada con CP3.1. pero también de manera indirecta con las CP1.

Respuestas esperadas

Ejercicio 1

El enunciado nos dice que se deben utilizar los 3 métodos algebraicos estudiados y se especifica que utilicen el que consideren más oportuno por lo que será muy probable que la mayoría de la clase use para cada apartado el mismo método ya que están planteados para que cada método me facilite la resolución de cada uno de los sistemas.

A continuación, tenemos las soluciones que previsiblemente encontraremos en esta pregunta:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ -4x - 6y = -30 \end{cases}$

Por reducción:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ -4x - 6y = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 30 \\ -4x - 6y = -30 \end{cases}$$

Sumo ambas ecuaciones y obtengo:

$0x + 0y = 0 \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones.

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 2y = 10 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

Por sustitución:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2y = 10 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2y = 10 \\ x = 6 + 3y \end{cases}$$

Sustituyo el valor de x en la primera ecuación y resuelvo:

$\frac{x}{2} + 2y = 10 \Rightarrow \frac{6+3y}{2} + 2y = 10 \Rightarrow 6 + 3y + 4y = 20 \Rightarrow 7y = 20 - 6$

$\Rightarrow 7y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{2} \Rightarrow y = 2$

Sustituyo el valor de y en la segunda ecuación y resuelvo:

$x = 6 + 3y \Rightarrow x = 6 + 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 6 + 6 \Rightarrow x = 12$

La solución del sistema es $(x, y) = (12, 2)$

c) $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 3y - 5x = 2y - 3 \end{cases}$

Por igualación:

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ 3y - 5x = 2y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 5x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 + 2x \\ y = -3 + 5x \end{cases}$$

Igualo ambas expresiones y resuelvo:

$3 + 2x = -3 + 5x \Rightarrow 3 + 3 = 5x - 2x \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$

Sustituyo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones primeras y resuelvo:

$y = 3 + 2x \Rightarrow y = 3 + 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 3 + 4 \Rightarrow y = 7$

La solución del sistema es $(x, y) = (2, 7)$

Ejercicio 2

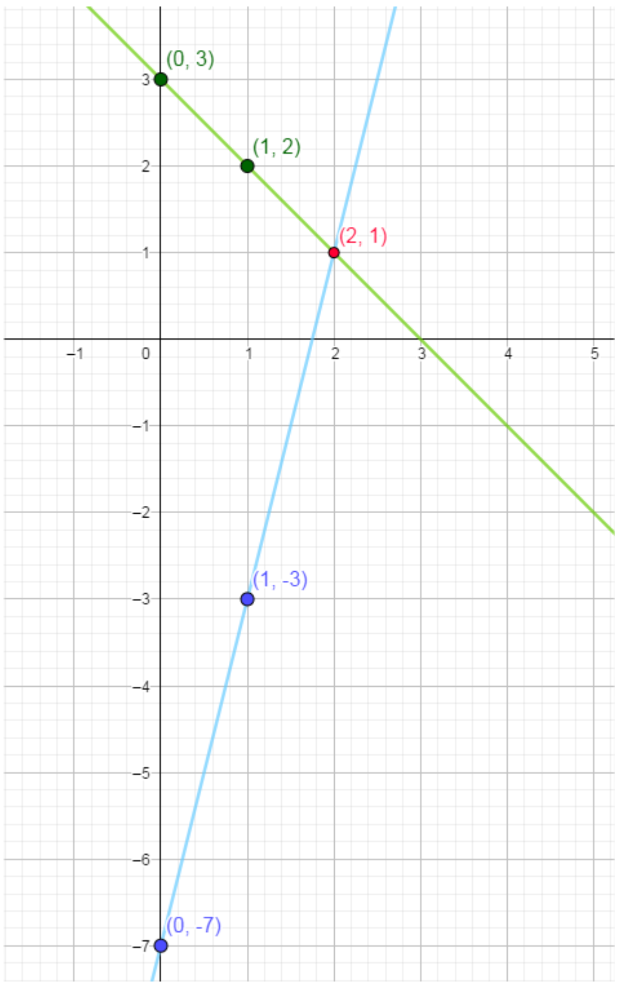
El enunciado especifica que se debe utilizar el método gráfico. A continuación, se muestra el proceso de resolución que previsiblemente han empleado los alumnos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

Damos dos valores a x en cada una de las expresiones para obtener la y:

	$x + y = 3$		$4x - y = 7$	
x	0	1	0	1
y	3	2	-7	-3

Representamos gráficamente los puntos y los uno generando las dos rectas, el punto de corte (si lo hay) es la solución del sistema:



La solución del sistema es $(x, y) = (2,1)$

Ejercicio 3

El enunciado nos pide que el alumno invente una situación que podamos modelizar matemáticamente como indica cada aparatado. Una posible de las infinitas soluciones que pueden darnos los alumnos son:

a) Si nos ayudamos modelizando primero un sistema de ecuaciones que tiene dicha solución puede ser: $\begin{cases} x+y=15 \\ 4x+2y=36 \end{cases}$ por reducción es fácil y rápido ver que dicha solución es única para este sistema. Así que a partir de él un posible enunciado sería: En un corral hay 15 animales entre perros y gallinas. Si sumamos las patas de los perros y las patas de las gallinas obtenemos 36 patas. ¿Cuántos perros y gallinas hay?

b) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ el sistema dado no tiene solución así que lo utilizaremos para dar un enunciado.
Si me compro un bolígrafo y un cuaderno me cuesta todo 4 euros, pero en cambio sí compro dos bolígrafos y dos cuadernos me cuestan 10 euros. ¿Cuál es el precio de cada producto?

c) En un concurso de 60 preguntas por cada acierto dan 1€ y por cada fallo restan 50 céntimos. Si al final el concursante se ha llevado 30€. ¿Cuántas preguntas ha acertado y cuántas ha fallado?

Ejercicio 4

Veamos de manera individual cada apartado, aunque todos estén relacionados con el mismo sistema cada respuesta es de un registro distinto.

a) Los alumnos previsiblemente primero encajaran la solución en el sistema y tomen los huecos como dos incógnitas a encontrar. Las posibles respuestas de los alumnos son:

$$\begin{cases} 2x-3y= \_\_ \\ x+\_\_y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=a \\ 2+b\cdot 1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-3=a \\ 2+b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

El sistema buscado es:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-3y=-1 \end{cases}$$

Comprobamos que el par $(x, y) = (2,1)$ es solución del sistema obtenido:

- ✓ $2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$
- ✓ $2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$

b) Los alumnos deberán fijarse primero en la relación que hay entre los coeficientes de las x y hacer que la relación sea la misma entre el resto de los coeficientes:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x - \dfrac{3}{2}\, y = -1 \end{cases}$$

c) Siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado b) salvo que deberán darse cuenta que en este caso el coeficiente del término independiente debe no debe cumplir dicha relación. La respuesta previsible será:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - \dfrac{3}{2}\, y = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Denotando como $x =$ "número de móviles de tipo A" e $y =$ "número de móviles de tipo B".

En total han repartido 25 móviles $x + y = 25$.

El coste de los móviles ha sido de 1.500€ y cada modelo cuesta 75 y 50 por lo que $75x + 50y = 1500$

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 75x + 50\, y = 1500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 - y \\ 75x + 50\, y = 1500 \end{cases}$$

Sustituyo el valor de x en la segunda ecuación y resuelvo:

$$75x + 50\, y = 1500 \Rightarrow 75(25 - y) + 50y = 1500$$

$$\Rightarrow 1875 - 75y + 50y = 1500 \Rightarrow 1875 - 1500 = 75y - 50y$$

$$\Rightarrow 375 = 25y \Rightarrow y = \frac{375}{25} \Rightarrow y = 15$$

Sustituyo el valor de y en la primera ecuación y resuelvo:

$$x = 25 - y \Rightarrow x = 25 - 15 \Rightarrow x = 10$$

Luego han comprado 10 móviles a 75€ y 15 móviles a 50€.

Ejercicio 6

Denotando como $x =$ "número de sacos con peso A" e $y =$ "número de sacos con peso B".

$Peso\ A = 30kg.$

$Peso\ B = 30 \cdot 0{,}8 = 24kg.$

Hay el triple de sacos pequeños que de grandes $3x = y$.

El peso total es $714kg$ por lo que $30x + 24y = 714$

$$\begin{cases} 3x = y \\ 30x + 24y = 714 \end{cases}$$

Sustituyo el valor de y en la segunda ecuación y resuelvo:

$$30x + 24y = 714 \Rightarrow 30x + 24 \cdot 3x = 714 \Rightarrow 30x + 72x = 714$$
$$\Rightarrow 102x = 714 \Rightarrow x = \frac{714}{102} \Rightarrow x = 7$$

Sustituyo el valor de x en la primera ecuación y resuelvo:

$$3x = y \Rightarrow 3 \cdot 7 = y \Rightarrow y = 21$$

Luego transportará 21 sacos pequeños y 7 grandes.

Criterios de evaluación

Para determinar cómo evaluar la prueba descrita anteriormente utilizaremos el modelo de tercios definido por Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, en su propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas.

En cada una de las tareas de cada ejercicio vamos a determinar el máximo que se puede descontar a un alumno al fallar en esa tarea. No será obligatorio descontar los máximos puntos permitidos por cada fallo de una tarea pero sí se deberá descontar la misma cantidad si el tipo de fallo se repite durante todo el examen. Por ejemplo, si en un fallo de despejar mal se le quita 1 punto durante el resto del examen a ese fallo habrá que restarle lo mismo, siempre y cuando no se exceda del máximo permitido. En ese caso, se deberá de rebajar la penalización por ese fallo.

Además cada pregunta se evaluará sobre 10 y sobre los ejercicios con apartados se repartirá el valor total del ejercicio entre los apartados en partes iguales (se evaluarán sobre 10 cada uno de los apartados). El valor de cada ejercicio está determinado en cada enunciado.

<u>Clasificación de las tareas:</u>

Ejercicio 1

- **Tareas principales:**
    - Utilizar correctamente las técnicas de resolución algebraica aprendidas. [0,7 puntos]
    - Mostrar expresamente el valor resultante de cada una de las incógnitas. [0,3 puntos]
- **Tareas auxiliares específicas:**
    - Obtener ecuaciones equivalentes a las mostradas en el enunciado que permitan llegar a la solución final. [0,4 puntos]
- **Tareas auxiliares generales:**
    - Realizar cálculos aritméticos de forma correcta. [0,1 puntos]

Ejercicio 2

- **Tareas principales:**
    - Aplicar correctamente la técnica de resolución gráfica. [0,5 puntos]
    - Mostrar expresamente el valor resultante de cada una de las incógnitas. [0,5 puntos]
- **Tareas auxiliares específicas:**
    - Aplicar correctamente la técnica tabular dando valores para poder representar la gráfica. [0,4 puntos]
- **Tareas auxiliares generales:**
    - Realizar cálculos aritméticos de forma correcta. [0,1 puntos]

Ejercicio 3

- **Tareas principales:**
    - Plantear relaciones algebraicas que describan el concepto matemático. [0,6 puntos]

    - Encontrar una situación con un contexto adecuado para la modelización de dicho planteamiento. [0,3 puntos]
- **Tareas auxiliares específicas:**
    - Ofrecer una solución correcta de las variables y las constantes de cada apartado. [0,4 puntos]
- **Tareas auxiliares generales:**
    - Redactar correctamente las relaciones mediante el uso del lenguaje textual. [0,1 puntos]

Ejercicio 4

- **Tareas principales:**
    - Plantear relaciones algebraicas que describan las condiciones dadas completando los huecos facilitados. [0,6 puntos]
    - Probar que la solución ofrecida es correcta. [0,4 puntos]
- **Tareas auxiliares generales:**
    - Realizar cálculos aritméticos de forma correcta. [0,1 puntos]

Ejercicio 5 y 6

- **Tareas principales:**
    - Planteamiento del sistema de ecuaciones mediante la traducción del lenguaje verbal al algebraico. [0,7 puntos]
    - Ofrecer una solución relacionada con el contexto del enunciado. [0,3 puntos]
- **Tareas auxiliares específicas:**
    - Resolver el sistema mediante cualquiera de las técnicas estudiadas. [0,5 puntos]
    - Devolver una solución precisa del sistema, indicando el valor de ambas incógnitas. [0.25 puntos]
- **Tareas auxiliares generales:**
    - Calcular correctamente operaciones con expresiones algebraicas o de tipo aritmético. [0.25 puntos]

BIBLIOGRAFÍA

Cajahuanca, L. (2016). *Historia de Los Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Recuperado de https://es.scribd.com/document/330458104/Historia-de-Los-Sistemas-de-Ecuaciones-Lineales

Centro Informático de Científico de Andalucía. (s.f.). *Historia de las ecuaciones lineales.* Recuperado de https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I., Oliveira, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas Orientadas a las enseñanzas académicas*. Editorial: (Anaya).

Díaz, E (2008). El blog de Ed. Blog dedicado a las matemáticas de secundaria. Recuperado de https://bitacoraed.wordpress.com/2008/03/27/sistemas-de-ecuaciones-concepto-de-solucion/

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

IES Ramón Olleros. (s.f.). *Problema 43: El intercambio*. Recuperado de http://www.iesramonolleros.es/matematicas/mundo_grecolatino/enunciados/Epigrama_43.pdf

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón. Aragón, 2 de junio de 2016.

Marcos J.C., (2018). *La Flor de Thymaridas de Paros.* Bitácoras de Matemáticas. Recuperado de https://bitacoradematematicasdejucarmarsa.blogspot.com/2018/12/la-flor-de-thymaridas-de-paros.html

Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Revista Digital de Matemáticas Sacit Ámetam. (2011). *Método egipcio de "Regula falsi" para resolver ecuaciones.* Recuperado de http://revistasacitametam.blogspot.com/2011/02/metodo-de-los-egipcios-de-regula-falsi.html

Schwartz, R. (2008a). A Classic from China: The Nine Chapters. *The Right Angle*., pp 8-12.

Sistema de ecuaciones lineales. (2015). Recuperado de https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/45/sistema-de-ecuaciones-lineales/

Vizmanos, J.R., Anzola, M. (2002). *Algoritmo.* Editorial: SM.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Alcaide, F., Peralta, J. (2007). *Ábaco.* Editorial: SM.

Pancorbo, L. (2007). *Vector.* Editorial: Vicens Vives.

ANEXO I: EJEMPLOS DE PROBLEMAS EN LOS DISTINTOS CONTEXTOS

Edades:

a) La edad de una persona es el doble de la de otra. Hace 7 años la suma de las edades era igual a la edad actual de la primera. Halla las edades de las personas. (SM 2002).

b) Un padre tienen 80 años y su hijo 38. ¿Cuántos años han pasado desde que la edad del padre era el cuádruple de la edad del hijo? (Vicens Vives 2007).

Productos de dos tipos:

c) Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Dispone en total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo? (SM 2002).

d) En una clase hay 25 alumnos. La relación entre el número de chicas y el de chicos es de 2/3. Calcula cuántos chicos y cuántas chicas hay. (Vicens Vives 2007).

Notas de examen:

e) En un test de resolución de problemas se suman 2 puntos por cada problema bien resuelto. Si el problema está mal, se resta 1 punto. Después de realizar 60 problemas, un alumno obtuvo 30 puntos. ¿Cuántos problemas resolvió bien? (SM 2007).

f) Un examen tipo test consta de 50 preguntas y hay que contestar todas. Por cada acierto se obtiene un punto y por cada fallo se resta 0,5 puntos. Si mi nota ha sido 24,5, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido? (Anaya 2015).

Números:

g) Dos números suman 75 y su diferencia es igual al tiple del menor. Averigua los números. (Vicens Vives 2007).

h) Halla dos números naturales que sumen 140 y tales que al dividir el mayor entre el menor obtengamos un 2 de cociente y 14 de resto. (Anaya 2015).

Precios. Rebajas o aumentos:

i) He pagado 55,72€ por una camiseta y un pantalón que costaban 70€ entre los dos. La camiseta tenía un 18% de descuento, y el pantalón, un 22%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo? (Anaya 2015).

j) Dos videojuegos cuestan 84€. ¿Cuál es el precio de cada videojuego si uno de ellos cuesta 14€ más que el otro? (Vicens Vives 2007).

Monedas:

k) María quiere realizar un viaje de vacaciones que cuesta 370€. A la hora de pagar entrega sus ahorros en billetes de 5 y 10 euros. Si en total entrega 50 billetes, ¿cuál es el número de billetes de cada clase? (SM 2007).

l) Una persona cambia monedas de 1 céntimo por monedas de 5 céntimos sin ganar ni perder en el cambio, quedando después del mismo con 60 monedas menos. Halla el dinero que tiene. (SM 2002).

Balanzas:

m) Una botella llena de leche pesa 1220g. Cuando está por la mitad, pesa 854g. ¿Cuánto pesa la botella vacía? (Anaya 2015).

n) Las dos balanzas están en equilibrio.

¿Cuál es la masa de cada esfera y de cada cubo? (SM 2007).

Geometría:

o) Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 80 m y la altura es 2/3 de la base. (SM 2002)

p) El lado de un rombo mide 10 m y su área, 96 m^2. Calcula la medida de las diagonales del rombo. (Vicens Vives 2007).

Mezclas. Cantidades:

q) Un comerciante mezcla café de calidad superior a 14 euros cada kilo y otro café de menos calidad de 9 euros cada kilo. ¿Cuánto hay que elegir de cada clase para obtener 10 kilos a 12 euros cada uno? (SM 2007).

r) Se quiere obtener un lingote de oro de 1 kg de peso y ley de 900 milésimas, fundiendo oro de 975 milésimas y oro de 875 milésimas. ¿Qué cantidad hay que fundir de cada clase? (SM 2002).

Repartos:

s) Una ONG va a repartir libros entre un grupo de niños sin recursos económicos. Si la ONG tuviera el doble de libros, cada niño recibiría 5 libros. Sin embargo si tuviera el triple de libros y el grupo de niños fuese de uno menos, cada niño recibiría 8 libros. ¿Cuántos libros se van a repartir y cuántos niños forman el grupo? (SM 2007).

t) Dos hermanos fueron a pescar. Al final del día uno dijo: "Si tú me das unos de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". El otro le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenían cada uno? (SM 2002).

Transportes. Velocidades:

u) Un tren sale de la ciudad A hacia la ciudad B a una velocidad constante de 120 km/h. Al mismo tiempo, otro tren parte de A hacia B con una velocidad constante de 90 km/h. Sabiendo que las ciudades A y B distan 420 km, averigua el tiempo que tardan en encontrarse y la distancia que le queda a cada tren para llegar a la estación de destino. (Vicens Vives 2007).

v) Un peatón recorre 22 km en 5 horas, pero los 10 primeros kilómetros va a una velocidad superior en 1 km/h a la del resto. Calcula la velocidad que llevó en el recorrido. (SM 2002).